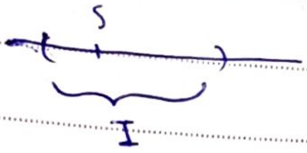
22/10/2018
5º μάθημα

$c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



$c(s) = (x(s), y(s))$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) \quad \|\dot{c}(s)\| = 1$

$= (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

Καμπυλότητα $k : I \to \mathbb{R}$, $k = \dot{\varphi}$

$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$

Πλαίσιο Frenet

$\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$, $\vec{n}(s) = J\vec{t}(s)$

$\begin{cases} \vec{t}\,' = k\vec{n} \\ \vec{n}\,' = -k\vec{t} \end{cases}$ Εξ. Frenet.

Θεμελιώδες Θεώρημα των καμπυλών του $\mathbb{R}^2$

i) <u>Ύπαρξη</u> : Για κάθε συνεχή συνάρτηση $k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $k(I)$, σε I υπάρχει C^2 καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με s = παράμετρο μήκους τόξου και καμπυλότητα τη δοθείσα συνάρτηση k.

ii) <u>Μοναδικότητα</u> : Έστω $c, \tilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ και οι δύο με φυσική παράμετρο σε I με καμπυλότητες $k, \tilde{k} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αντίστοιχα. Αν ισχύει $k = \tilde{k}$ τότε οι καμπύλες είναι γεωμετρικά ισότιμες.
Δηλαδή, $\exists\, T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.
Επιπλέον, ισχύει ότι η T διατηρεί προσανατολισμό.

Παρατήρηση: Αν $\kappa = -\tilde{\kappa}$ τότε $\tilde{c} = T \circ c$, η T αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Απόδειξη του Θεωρήματος.

(i) Έστω $s_0 \in I$. Ορίζω τη συνάρτηση $\phi : I \to \mathbb{R}$, $\phi(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du$

Ορίζω την καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με

$$c(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\phi(u)\,du, \int_{s_0}^{s} \sin\phi(u)\,du \right) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\left(\int_{s_0}^{u} \kappa(u)\,du \right) du, \int_{s_0}^{s} \sin\left(\int_{s_0}^{u} \kappa(u)\,du \right) du \right)$$

Προφανώς η c είναι λεία (C^2) με διάνυσμα ταχύτητας

$$\frac{dc}{ds}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s)) \Rightarrow \left\| \frac{dc}{ds}(s) \right\| = 1 \Rightarrow s = \text{μήκος τόξου}$$

$\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$ Η καμπυλότητα της c είναι η $\dot{\phi} = \kappa$

(ii) <u>Μοναδικότητα</u>: Θεωρώ $s_0 \in I$ και $A \in O(2)$ στροφή

Αντίστροφα $A\tilde{\dot{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0)$. Ορίζω την ισομετρία $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$

$T = T_v \circ A \circ T_w$, όπου $w = -\tilde{c}(s_0)$, $v = c(s_0)$

Θεωρώ την καμπύλη $\bar{c} : I \to \mathbb{R}^2$, $\bar{c} = T \circ \tilde{c}$.

Η $\bar{c}$ έχει παράμετρο μήκος τόξου s και καμπυλότητα $\bar{\kappa} = \tilde{\kappa} = \kappa$

$\bar{c}(s_0) = T_v(A(T_w(\tilde{c}(s_0))) = T_v(A(w + \tilde{c}(s_0))) = T_v(A0) = T_v(0) = v + 0$

$\Rightarrow \bar{c}(s_0) = c(s_0)$

$\dot{\bar{c}}(s_0) = \dot{A}\,\dot{\tilde{c}}(s_0) = \dot{c}(s_0) \Rightarrow \boxed{\dot{\bar{c}}(s_0) = c(s_0)}$ (**) Μπορώ να υποθέσω ότι

$\bar{\phi}(s_0) = \phi(s_0)$ (1)

$$\left.\begin{aligned} \kappa = \dot{\phi}, \text{ όπου } \quad & \dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s)) \\ \bar{\kappa} = \dot{\bar{\phi}} \quad \text{με} \quad & \dot{\bar{c}}(s) = (\cos\bar{\phi}(s), \sin\bar{\phi}(s)) \end{aligned}\right\} (*)$$

Επειδή $\bar{\kappa} = \kappa$ έχουμε $(\bar{\phi} - \phi)^{\cdot} = 0 \Rightarrow \bar{\phi} - \phi = $ σταθερή $\Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \bar{\phi} = \phi \overset{(*)}{\Rightarrow} \dot{\bar{c}}(s) = \dot{c}(s) \ \forall s \in I \rightarrow (\bar{c}(s) - c(s))^{\cdot} = 0 \ \forall s$

$\Rightarrow \bar{c}(s) - c(s) = $ σταθ $\overset{(**)}{\Rightarrow} \bar{c}(s) = c(s) \ \forall s \in I$

Πόρισμα

Οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ με σταθερή καμπυλότητα κ είναι

i) ευθείες (ή ευθ. τμήματα) του $\kappa = 0$

ii) κύκλοι (ή τόξο κύκλων) όταν $\kappa \neq 0$.

$\kappa(s) = as \quad , \quad \phi(s) = \int_0^s \kappa(u)\,du = \frac{1}{2} a s^2$

$\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s)) = \left(\cos\frac{a}{2}s^2, \sin\left(\frac{a}{2}s^2\right)\right)$

$c(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{a}{2}u^2\right)du, \int_0^a \sin\left(\frac{a}{2}u^2\right)du\right)$